Voorbeeldexamen: uitwerking en normering

1a

Uitsplitsen: voor $x < -1$: $3+\sqrt{2-x} = -x-1 \Rightarrow \sqrt{2-x} = -x-4$ voor $x > -1$: $3+\sqrt{2-x} = x+1 \Rightarrow \sqrt{2-x} = x-2$	2
Eerste vergelijking kwadrateren en uitwerken tot $x^2+9x+14=0$	1
Oplossen: $x=-2$ of $x=-7$, maar $x=-2$ vervalt. Dit geeft het punt $(-7,6)$	1
Tweede vergelijking uitwerken tot $x^2-3x+2=0$	1
Oplossen: $x=1$ of $x=2$, maar $x=1$ vervalt. Dit geeft het punt $(2,3)$	1

b

$f(x) = 3+(2-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$	1
Voor de richtingshoek α_1 van de raaklijn geldt: $\tan(\alpha_1) = f'(-7) = -\frac{1}{6} \Rightarrow \alpha_1 \approx -9{,}5°$	2
De richtingshoek van de grafiek van g is $\alpha_2 = -45°$	1
$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \approx 35{,}5°$	1

c

$O_V = \int_0^2 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (3+\sqrt{2-x}-(x+1))\mathrm{d}x = \int_0^2 (2-x+\sqrt{2-x})\mathrm{d}x$	1
$= \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}(2-x)^{1\frac{1}{2}}\right]_0^2$	2
$= 4-2-0-(0-\frac{2}{3}.2\sqrt{2}) = 2+\frac{2}{3}\sqrt{2}$	1

d

Spiegelen in de lijn $y=x$. De inverse functie van f vind je door $y=3+\sqrt{2-x}$ om te zetten in $x = 3+\sqrt{2-y} \Rightarrow x-3 = \sqrt{2-y} \Rightarrow (x-3)^2 = 2-y \Rightarrow y = 2-(x-3)^2 = -x^2+6x-7$	2
Van $g: y = x+1$ wordt de inverse functie $x = y+1 \Rightarrow y = x-1$	1
De inhoud is $\int_1^3 \pi(x-1)^2\mathrm{d}x + \int_3^{3+\sqrt{2}} \pi(-x^2+6x-7)^2\mathrm{d}x$	1
Het antwoord is 17,9	1

2a

Verticaal als noemer $=0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x=1$	1
Horizontaal: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2\ln(x)}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\ln(x)}-2}{1} = \dfrac{0-2}{1} = -2 \Rightarrow y=-2$	2
want als $x\to\infty$ dan zal ook $\ln(x)\to\infty$ en dus $\dfrac{1}{\ln(x)} \to 0$	

b

$f'(x) = \dfrac{\ln(x)\cdot -\frac{2}{x} - (1-2\ln(x))\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{-1}{x\cdot\ln^2(x)}$	2
$f''(x) = \dfrac{x\cdot\ln^2(x)\cdot 0 - -1\cdot(x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} + 1\cdot\ln^2(x))}{x^2\cdot\ln^4(x)}$	2
$= \dfrac{2\ln(x)+\ln^2(x)}{x^2\cdot\ln^4(x)} = \dfrac{2+\ln(x)}{x^2\cdot\ln^3(x)}$	1

c

Buigpunt als $f''(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = -2 \Rightarrow x = \mathrm{e}^{-2}$ $f\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = \dfrac{1-2\cdot-2}{-2} = -\dfrac{5}{2}$	2
De helling van de buigraaklijn is $f'\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-2}\cdot(-2)^2} = -\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$ of $-\frac{1}{4}\mathrm{e}^2$	2
Raaklijn: $y = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^2\cdot x + b$. Buigpunt invullen: $-\frac{5}{2} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^{-2} + b \Rightarrow -\frac{5}{2} = -\frac{1}{4} + b \Rightarrow b = -\frac{9}{4}$	
De raaklijn is dus $y = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^2 x - \frac{9}{4}$	1

d

Als de grafieken elkaar raken dan moet $f(x) = g_p(x)$ èn $f'(x) = g_p'(x)$.	1
$f'(x) = g_p'(x)$ geeft $\dfrac{-1}{x\cdot\ln^2(x)} = \dfrac{-1}{x} \Rightarrow \ln^2(x) = 1 \Rightarrow \ln(x) = -1$ of $\ln(x) = 1$	2
$\Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$: $f(\mathrm{e}^{-1}) = g_p(\mathrm{e}^{-1}) \Rightarrow -3 = p+1 \Rightarrow p = -4$	1
$\ln(x) = 1 \Rightarrow x = \mathrm{e}$: $f(\mathrm{e}) = g_p(\mathrm{e}) \Rightarrow -1 = p-1 \Rightarrow p = 0$	1

3a

Pas de cosinusregel toe in $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 21 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$	2
$\Rightarrow\ (10+r)^2 = 16^2 + (6+r)^2 - 2\cdot(6+r)\cdot 16 \cdot \cos(60^\circ)$	1
Dit uitwerken tot $r = 4$	1

b

$\vec{r}_{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_{\text{raaklijn}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 86 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 0 \\ 43 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 43 \end{pmatrix}$	2
Invullen in c_2 geeft $(4t-10)^2 + (3t-8)^2 = 36 \Rightarrow\ 25t^2 - 128t + 128 = 0$	1
Uitwerken met abc-formule geeft $t \approx 1{,}36$ of $t \approx 3{,}76$	1
Dit geeft de punten $(1.4, -3.9)$ en $(11.0, 3.3)$	1

c

Een willekeurige lijn door E: $y = ax - 5$	2
Invullen in c_2 geeft $(x-6)^2 + (ax-5)^2 = 36$	1
Uitwerken tot $(1+a^2)x^2 - (12+10a)x + 25 = 0$	1
Hier moet $D = 0 \Rightarrow\ (12+10a)^2 - 4\cdot(1+a^2)\cdot 25 = 0 \Rightarrow\ a = -\frac{11}{60}$	2
$\Rightarrow$ de raaklijn is de lijn $y = -\frac{11}{60}x - 5$	1

4a

$x'(t) = 3 - \mathrm{e}^t \Rightarrow\ x'(t) = 0$ als $\mathrm{e}^t = 3 \Rightarrow\ t = \ln(3)$	1
$y'(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \Rightarrow\ y'(t) = 0$ als $\mathrm{e}^t(2\mathrm{e}^t - 2) = 0 \Rightarrow\ \mathrm{e}^t = 0$ of $\mathrm{e}^t = 1 \Rightarrow\ t = 0$	2
Raaklijn verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0 \Rightarrow\ t = \ln(3) \Rightarrow$ in het punt $(3\ln(3) - 3, 3)$	1
Raaklijn horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0 \Rightarrow\ t = 0 \Rightarrow$ in het punt $(-1, -1)$	1

b

Snijpunt met x-as als $y = 0 \Rightarrow\ \mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t = 0 \Rightarrow\ \mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t - 2) = 0 \Rightarrow\ \mathrm{e}^t = 2 \Rightarrow\ t = \ln(2)$	1
De helling in een punt is $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t}{3 - \mathrm{e}^t}$	1
Voor $t = \ln(2)$ wordt dit $\dfrac{8-4}{3-2} = 4$	1

c

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 - \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ Voor $t = \ln(2)$ wordt dit $\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$	1
$\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t \\ 4\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ Voor $t = \ln(2)$ wordt dit $\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix}$	2
$a(\ln(2)) = \dfrac{\vec{v}(\ln(2)) \cdot \vec{a}(\ln(2))}{\lvert\vec{v}(\ln(2))\ \rvert} = \dfrac{-2+48}{\sqrt{5}} = \dfrac{46}{\sqrt{5}} = \dfrac{46}{5}\sqrt{5} \Rightarrow\ q = \frac{46}{5}$	2

d

In het raakpunt is de helling van de kromme gelijk aan $-20 \Rightarrow\ \dfrac{2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t}{3 - \mathrm{e}^t} = -20$	1
$2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t = -60 + 20\mathrm{e}^t \Rightarrow\ \mathrm{e}^{2t} - 11\mathrm{e}^t + 30 = 0 \Rightarrow\ (\mathrm{e}^t - 5)(\mathrm{e}^t - 6) = 0 \Rightarrow\ t = \ln(5)$ of $t = \ln(6)$	2
$t = \ln(5)$ geeft het punt $(3\ln(5) - 5, 15)$	
Dit punt invullen in $y = -20x + p$ geeft $p = 60\ln(5) - 85$	1
$t = \ln(6)$ geeft het punt $(3\ln(6) - 6, 24)$ en $p = 60\ln(6) - 96$	2

5a

$\sin(2x) - 2\cos(x) = \cos(x) \Rightarrow\ 2\sin(x)\cos(x) - 3\cos(x) = 0$	1
$\cos(x)\,(2\sin(x) - 3) = 0 \Rightarrow\ \cos(x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{3}{2}$	1
$x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$	1

b

$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\sin(x)$	1
$f'(x) = 0$ als $2\left(1 - 2\sin^2(x)\right) + 2\sin(x) = 0 \Rightarrow\ 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$	2
Bv. met abc-formule: $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$	2
Voor $x = 1\frac{1}{6}\pi$: max $f\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, voor $x = 1\frac{5}{6}\pi$: min $f\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$	1
$B_f = \left[-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right]$	1

c

$O_V = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} (\sin(2x) - 3\cos(x))\,\mathrm{d}x$	1
$= \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - 3\sin(x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi}$	2
$= -\frac{1}{2} \cdot -1 - 3 \cdot -1 - (-\frac{1}{2} \cdot -1 - 3) = 6$	1

d

$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sin(2x) - \cos(x)}{\cos(x)}$	
Voor $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$ zijn teller en noemer beide gelijk aan 0.	1
$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\sin(2x) - \cos(x)}{\cos(x)} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{2\sin(x)\cos(x) - \cos(x)}{\cos(x)} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} (2\sin(x) - 1) = 0$	2
$\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}\pi} \dfrac{\sin(2x) - \cos(x)}{\cos(x)} = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}\pi} (2\sin(x) - 1) = -3$	1
De twee perforaties zijn dus $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, -3\right)$	1

Voor dit voorbeeldexamen kun je het behaalde cijfer berekenen met de volgende formule:

$$\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{score}}{90} \cdot 9$$