BOSWELL-BÈTA

James Boswell Examen
VWO Wiskunde A – Voorbeeldexamen 1

Datum:	
Tijd:	3 uur
Aantal vragen:	6
Aantal subvragen:	24
Aantal bijlagen:	0
Totaal aantal punten:	72

- Vermeld **op ieder vel** dat je inlevert je naam.
- Laat bij iedere opgave door middel van een berekening of motivatie zien hoe het antwoord is verkregen (o.a. bij gebruik van de grafische rekenmachine). <u>Aan een antwoord zonder toelichting worden geen punten toegekend.</u>
- Schrijf goed leesbaar met blauwe of zwarte inkt. Het gebruik van tipp-ex e.d. of het schrijven met potlood is niet toegestaan. Gebruik uitsluitend een potlood voor het maken van een tekening.
- Toegestane hulpmiddelen:
  - Grafische rekenmachine;
  - Tekenmateriaal;
  - Lijst van formules.

Opgave 1: Schaatsen

Pim en Rafa trainen samen voor het schaatsen, op de ijsbaan van Thialf. Ze rijden rondjes van 400 meter, altijd achter elkaar zodat één van hen uit de wind blijft. Gedurende ieder rondje rijdt óf Pim óf Rafa op kop. Bij een normale training rijden ze acht rondjes waarbij ieder van hen evenveel rondjes op kop moet rijden.

2p **a** Stel dat Pim als eerste op kop rijdt. Bereken hoeveel verschillende volgordes er dan nog mogelijk zijn.

Vlak voor de start van het wedstrijdseizoen mogen Pim en Rafa samen trainen met de schaatstoppers Sven, Antoinette en Kjeld. Ook nu rijden ze achter elkaar, in een zogenoemd treintje.

3p **b** Hoeveel verschillende treintjes zijn er waarbij Sven en Kjeld achter elkaar rijden?

Na de training met de schaatstoppers rijden Rafa en Pim nog vijf wedstrijdjes tegen elkaar. De kans dat Rafa een wedstrijd wint, is gelijk aan $0{,}6$.

2p **c** Bereken de kans dat Rafa méér dan twee van deze wedstrijdjes wint. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Een week later strijden de twee vrienden om een beker. Ze hanteren de regel *best of five.* Dat houdt in dat de schaatser die als éérste drie wedstrijden heeft gewonnen, de beker wint.

Het aantal wedstrijden dat nodig is voordat de beker is gewonnen, noemen we X. Hieronder zie je de kansverdeling van X. Er ontbreken twee kansen.

k	3	4	5
$P(X=k)$	...	...	$0{,}3456$

4p **d** Bereken de ontbrekende kansen en bepaal vervolgens de verwachtingswaarde van X. Rond de verwachtingswaarde af op één decimaal.

De schaatstopper Antoinette schaatst vaak een afstand van 3000 meter. Deze rit is opgebouwd uit een stuk van 200 meter gevolgd door 7 volledige rondjes van 400 meter.
Tijdens de training legt Antoinette de eerste 200 meter in $20{,}6$ seconden af.
Over het eerste volledige rondje dat daarop volgt, doet ze $30{,}4$ seconden. Haar rondetijden nemen vervolgens elk rondje met $0{,}7\%$ toe.

De rondetijd (in seconden) voor het eerste volledige rondje noemen we u_1.

2p **e** Stel een directe formule op voor u_n, waarbij u_n de rondetijd (in seconden) van het n^{de} volledige rondje is.

3p **f** Ga met een berekening na of Antoinette minder dan 4 minuten over deze rit van 3000 meter doet.

Opgave 2: Woordenschat

Het aantal woorden dat een volwassen Nederlander kent, varieert van $45\ 000$ tot $250\ 000$ woorden. Uit onderzoek is gebleken dat een kind op zijn 12^{de} verjaardag gemiddeld $17\ 000$ woorden kent. De grootste verschillen in woordenschat ontstaan na de 12^{de} verjaardag.

Voor kinderen met een **grote** woordenschat blijkt dat de woordenschat vanaf 12 jaar exponentieel groeit. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$$W_G = 17\ 000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}239t}$$

Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12^{de} verjaardag.

3p **a** Bereken met hoeveel procent de woordenschat volgens deze formule iedere maand groeit. Rond je antwoord af op één decimaal.

Humam kent veel woorden voor zijn leeftijd. Hij is net 14 jaar geworden en kent al zo'n $42\ 500$ woorden.

4p **b** Hoeveel maanden jonger is hij dan de leeftijd die je op basis van zijn woordenschat zou verwachten? Maak gebruik van de formule voor kinderen met een grote woordenschat. Rond je antwoord af op hele maanden.

Voor kinderen met een **kleine** woordenschat blijkt dat de woordenschat vanaf hun 12^{de} verjaardag lineair toeneemt. Bij hen groeit de woordenschat tot gemiddeld $45\ 000$ woorden op hun 21^{ste} verjaardag. Voor kinderen met een kleine woordenschat kan een formule worden opgesteld van de vorm $W_K = at + b$.

2p **c** Stel deze formule op. Neem ook hier t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12^{de} verjaardag. Rond a af op gehelen.

3p **d** Bereken op welke leeftijd de woordenschat van een kind met een grote woordenschat twee maal zo groot is als de woordenschat van een kind met een kleine woordenschat.

Opgave 3: Differentiëren

4p **a** Gegeven is de functie $g(x) = \frac{10 \ln(x)}{x}$.
De lijn k is de raaklijn aan de grafiek van g in het punt $A(1,0)$.

Stel met behulp van differentiëren de formule op van lijn k.

6p **b** Gegeven is de functie $h(x) = \mathrm{e}^{-0,75x} \cdot x^3$.

Bereken met behulp van differentiëren de x-coördinaat van de top(pen) van de grafiek van h.
Geef bij iedere top aan of het om een maximum of minimum gaat.

Opgave 4: Komkommers

In 1988 zijn er door de Europese Unie normen vastgesteld waar komkommers, die bedoeld zijn voor consumptie, aan moeten voldoen. Eén van deze normen is dat komkommers een minimumlengte van 25 cm moeten hebben.

Een groenteteler kweekt komkommers. De lengte van zijn komkommers is normaal verdeeld met een gemiddelde van 36,2 cm en een standaardafwijking van 5,7 cm.

2p **a** Welk percentage van zijn komkommers voldoet aan de Europese norm? Rond je antwoord af op één decimaal.

In de wetgeving van de Europese Unie is ook vastgelegd dat de komkommers minimaal 180 gram moeten wegen. Het gewicht van de komkommers van de groenteteler is normaal verdeeld met een gemiddelde van 216,5 gram. Hij heeft vastgesteld dat 10% van zijn komkommers niet aan de norm voor het gewicht voldoet.

3p **b** Bereken de standaardafwijking van het gewicht van zijn komkommers. Rond af op één decimaal.

In 1988 werd ook bepaald hoe 'krom' een komkommer maximaal mag zijn. Deze regel heeft tot veel kritiek geleid. In 2009 is besloten om deze regel te schrappen. Sindsdien mogen er overal weer kromme komkommers worden verkocht.

In een supermarkt in de stad Wageningen is met een experiment onderzocht of je de verkoop van kromme komkommers kunt stimuleren. In het experiment kregen kromme komkommers een plek in het schap naast de rechte komkommers. Boven het schap werd een groot bord gehangen met de mededeling dat een kromme komkommer net zo lekker is als een rechte en dat de aankoop bijdraagt aan het voorkomen van voedselverspilling. Vervolgens is 14 dagen lang bijgehouden hoeveel van de verkochte komkommers 'krom' waren.

Vóór het experiment, dus zonder de mededeling boven het schap, was 30% van de verkochte komkommers 'krom'. De supermarkt vermoedde dat de mededeling op het bord de verkoop van de kromme komkommers zou stimuleren en heeft dit onderzocht met behulp van een statistische toets.

2p **c** Stel de hypothesen op bij deze statistische toets.

Van de 2958 komkommers die er gedurende de 14 dagen zijn verkocht, waren er 1053 'krom'.

4p **d** Voer de hypothesetoets uit en geef de conclusie die de supermarkt zal trekken. Gebruik een significantieniveau van 5%.

Opgave 5: Massa en metabolisme

In deze opgave bekijken we het energieverbruik van zoogdieren in rust. Dit energieverbruik wordt uitgedrukt in Watt (W = Joule per seconde).

Het energieverbruik van grote dieren is hoger dan dat van kleine dieren. Zo heeft een hond, die gemiddeld 11,5 kg weegt, een energieverbruik van ongeveer 25,6 W en een paard, dat gemiddeld 650 kg weegt, een energieverbruik van ongeveer 530 W.

2p **a** Laat zien dat er op basis van deze gegevens **geen** recht evenredig verband kan bestaan tussen het energieverbruik en het gewicht van een dier.

De Amerikaanse diergeneeskundige en onderzoeker Max Kleiber onderzocht in 1932 voor verschillende dieren wat hun gewicht en het bijbehorende energieverbruik was. Op basis van zijn metingen stelde hij voor zoogdieren de volgende formule op:

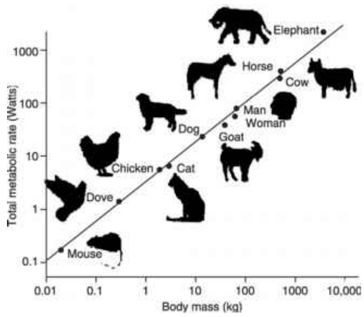
$$E = 4{,}1 \cdot m^{a}$$

Hierin is E het energieverbruik in W en m het gewicht van het dier in kg. De waarde van a stelde hij, afgerond op twee decimalen, vast op 0,75.

3p **b** Bereken de waarde van a in drie decimalen. Maak hiervoor gebruik van het gewicht van een hond en zijn bijbehorende energieverbruik.

3p **c** Bereken hoeveel kilogram een dier weegt met een energieverbruik van 100 W volgens dit model. Rond af op gehelen.

Kleiber zette zijn meetgegevens uit op dubbellogaritmisch papier: hierbij is zowel op de horizontale als op de verticale as gebruik gemaakt van een logaritmische schaalverdeling. De punten liggen nagenoeg op een rechte lijn. Dat betekent dat moet gelden dat:



$$\log(E) = a + b \cdot \log(m)$$

Je kunt de formule $E = 4{,}1 \cdot m^{0{,}75}$ herleiden tot deze vorm. De eerste stap in deze herleiding is:

$$\log(E) = \log(4{,}1 \cdot m^{0{,}75})$$

3p **d** Maak de herleiding af. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.

In de praktijk is het vaak zinvol om het energieverbruik van een dier per kilogram lichaamsgewicht te bepalen, het zogenaamde relatieve energieverbruik E_r (in W per kg). Er geldt dus:

$$E_r = \frac{E}{m}$$

2p **e** Laat zien dat $E_r(m) = 4{,}1 \cdot m^{-0{,}25}$. Licht je antwoord duidelijk toe.

Let op. Deze opgave gaat verder op de volgende bladzijde

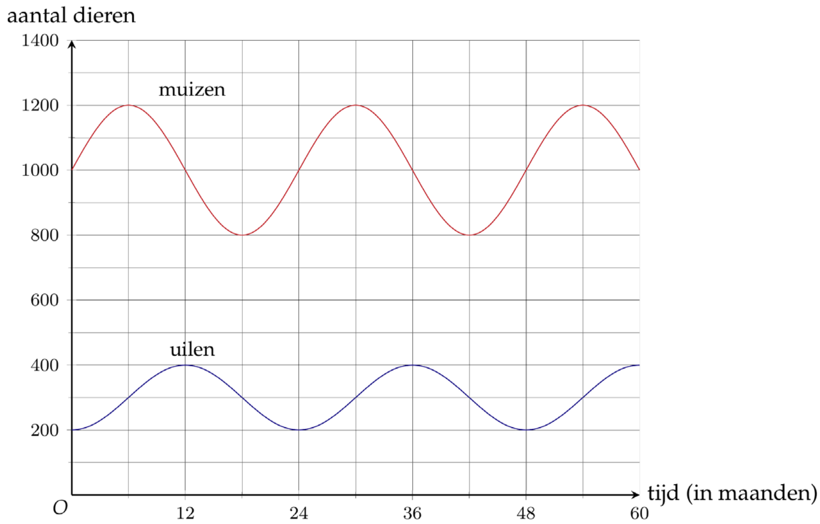
Uit deze formule $E_r(m) = 4{,}1 \cdot m^{-0{,}25}$ volgt dat zwaardere dieren minder energie verbruiken per kilogram lichaamsgewicht dan lichtere dieren, met andere woorden: E_r is een dalende functie van m.

3p **f** Toon met behulp van de afgeleide van E_r aan dat de grafiek van E_r voor alle waarden van m daalt.

Opgave 6: Uilen en muizen

In een bepaald gebied varieert de populatie uilen en muizen volgens een zogenoemde *prooi-roofdiercyclus*. Als er veel muizen zijn, trekt dat uilen aan. Dat leidt op den duur tot een afname van het aantal muizen. Hierdoor vertrekken de uilen en kan de muizenpopulatie weer groeien. Dit proces herhaalt zich keer op keer.

Zowel de uilen- als de muizenpopulatie kan worden beschreven met een sinusfunctie. In de figuur zie je de grafieken die bij deze functies horen.



Bij de muizenpopulatie hoort de functie $M(t) = 1000 + 200 \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right)$. Hierin is $M(t)$ het aantal muizen op tijdstip t. De tijd t is in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2015.

4p **a** Bereken in welke maanden in 2015 er gedurende de **hele maand** meer dan 1150 muizen in het gebied zijn.

Voor de uilenpopulatie kun je ook een functievoorschrift opstellen van de vorm $U(t) = a + b \cdot \sin\big(c(t - d)\big)$. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2015.

3p **b** Bepaal de waarden van a, b, c en d. Leg duidelijk uit hoe je aan je antwoord komt.