

James Boswell Examen VWO Wiskunde A – Voorbeeldexamen 1

Datum:

Tijd: 3 uur

Aantal vragen: 6

Aantal subvragen: 23

Aantal bijlagen: 1

Totaal aantal punten: 72

- Vermeld **op ieder vel** dat je inlevert je naam.
- Laat bij iedere opgave door middel van een berekening of motivatie zien hoe het antwoord is verkregen (o.a. bij gebruik van de grafische rekenmachine). Aan een antwoord zonder toelichting worden geen punten toegekend.
- Schrijf goed leesbaar met inkt. Het gebruik van tipp-ex e.d. of het schrijven met potlood is niet toegestaan. Gebruik uitsluitend een potlood voor het maken van een tekening.
- Toegestane hulpmiddelen:
 - Grafische rekenmachine;
 - Tekenmateriaal;
 - Lijst van formules

Opgave 1: Amerikaanse roulette

Roulette is een populair spel in het casino. In dit spel rolt een balletje door een wiel, waarna het vaart verliest en in één van de vakjes terechtkomt.

Bij Amerikaanse roulette zijn er 38 vakjes. De nummers lopen van 1 tot en met 36, daarvan is de helft rood gekleurd en de andere helft zwart. Verder zijn er twee groene vakjes: 0 en 00.

In deze opgave bekijken we twee manieren van spelen, die we variant 1 en variant 2 noemen.



variant 1

Je zet in op één van de nummers 1 tot en met 36. Komt het balletje op jouw nummer, dan krijg je € 36 uitbetaald. Als dit niet het geval is, verlies je de inzet. De inzet per keer spelen is € 1.

- 2p **a** Bereken de kans dat het balletje op een nummer terechtkomt dat groter is dan 9.

Stel dat je 20 keer speelt volgens **variant 1**.

- 3p **b** Bereken de kans dat je in deze 20 spellen precies één keer wint. Rond je antwoord af op vier decimalen.

Een andere manier van spelen is:

variant 2

Je zet in op een kleur (rood of zwart). Komt het balletje op jouw kleur, dan krijg je € 2 uitbetaald. Als dit niet het geval is, verlies je de inzet. Ook bij deze manier van spelen is de inzet € 1.

Stel dat je 20 keer speelt volgens **variant 2**.

- 3p **c** Bereken de kans dat je in deze 20 spellen hoogstens 10 keer wint. Rond je antwoord af op vier decimalen.

- 5p **d** Onderzoek hoe vaak je dit spel minimaal moet spelen, zodat de kans dat je meer dan 15 keer wint tenminste 80% is.

Opgave 2: Amfitheater

Een amfitheater is een gebouw uit de Romeinse oudheid. In een amfitheater bevinden de zitplaatsen zich als een halve cirkel rondom een podium. Zie figuur 1.

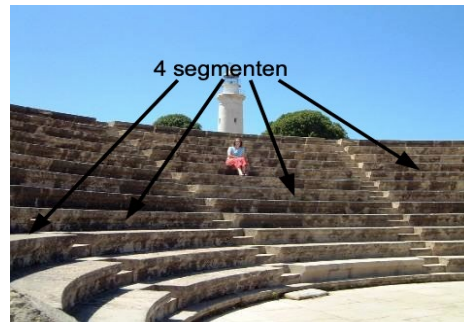


figuur 1

In deze opgave bekijken we een amfitheater van twaalf rijen hoog. Het theater bestaat uit vier segmenten. Zie figuur 2.

In elk segment zijn er op de onderste rij zes zitplaatsen. Op elke volgende rij neemt het aantal zitplaatsen in ieder segment met twee toe.

De aantallen zitplaatsen op de rijen in het amfitheater vormen een rij van twaalf getallen.



figuur 2

- 2p **a** Leg uit dat dit een rekenkundige rij is.
- 3p **b** Geef de directe formule van deze rij. Gebruik de notatie u_n voor het aantal zitplaatsen op de n -de rij van onder. Neem als eerste term u_1 .
- 3p **c** Bereken het totaal aantal zitplaatsen in dit amfitheater.

Opgave 3: Differentiëren

- 3p **a** Bepaal de afgeleide functie van $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{6}{x^2}$. Schrijf je antwoord zonder negatieve en gebroken exponenten.
- 3p **b** Bereken de helling van de raaklijn aan de grafiek van $g(x) = 3 \cdot \ln(2x - 1)$ in het punt $(1, 0)$.
- 7p **c** Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van de top van de grafiek van $h(x) = \sqrt{8x - x^2}$. Geef ook aan of dit een maximum of een minimum is.

Opgave 4: Hogere temperaturen

Er wordt in deze tijd veel gesproken over de opwarming van de aarde. Een grote groep mensen beweert dat dit komt doordat de mens te veel CO₂ uitstoot en daardoor het broeikaseffect toeneemt. Anderen beweren dat dit het resultaat is van een natuurlijke temperatuurcyclus die al eeuwenlang gaande is.

In 1901 begon het KNMI (Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut) met het systematisch registreren van de temperatuur in Nederland. De gemiddelde temperatuur over de hele maand juni blijkt normaal verdeeld met een gemiddelde van 15,35 °C en een standaardafwijking van 1,28 °C.

- 3p **a** In hoeveel procent van de junimaanden is de gemiddelde temperatuur hoger dan 15,7 °C? Rond je antwoord af op één decimaal.

Juni 1991 behoort tot de 25% koudste junimaanden die het KNMI heeft gemeten.

- 2p **b** Hoe hoog is de gemiddelde temperatuur in deze maand maximaal? Rond je antwoord af op twee decimalen.

Je kunt met een statistische toets nagaan of de gemiddelde temperatuur in de zomermaanden (juni, juli en augustus) in de laatste 10 jaar (2009-2018) significant is toegenomen ten opzichte van de jaren ervoor.

In de jaren tot 2009 is de gemiddelde temperatuur in de zomermaanden normaal verdeeld met een gemiddelde van 16,34 °C en een standaardafwijking van 0,95 °C.

- 2p **c** Stel de hypothesen op bij deze statistische toets.

In de laatste 10 jaar (2009-2018) was de gemiddelde temperatuur in de zomermaanden 17,51 °C.

- 4p **d** Voer de toets uit en formuleer een conclusie in termen van de context. Hanteer een significantieniveau van 5%.

Opgave 5: Konijnen in de duinen

In de Amsterdamse waterleidingduinen brak in 2008 een zeer besmettelijke ziekte onder konijnen uit. Hierdoor nam het aantal konijnen in de duinen in twee jaar tijd met 97% af. Deze afname verliep exponentieel.



- 3p **a** Bereken met hoeveel procent het aantal konijnen in deze periode iedere maand afnam. Rond je antwoord af op één decimaal.

Sindsdien groeit het aantal konijnen weer. Een bioloog heeft de volgende formule opgesteld voor de omvang van de konijnenpopulatie sinds 2010:

$$N(t) = \frac{10\,000}{1 + 80 \cdot e^{-0,35t}}$$

Hierin is $N(t)$ het aantal konijnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- 3p **b** Toon met een berekening aan dat de konijnenpopulatie tussen 1 januari 2010 en 1 januari 2011 met ongeveer 40% is toegenomen.

Met de afgeleide van N kun je berekenen met welke snelheid de populatie op een bepaald tijdstip groeit.

- 4p **c** Laat zien dat geldt:

$$N'(t) = \frac{280\,000 \cdot e^{-0,35t}}{(1 + 80 \cdot e^{-0,35t})^2}$$

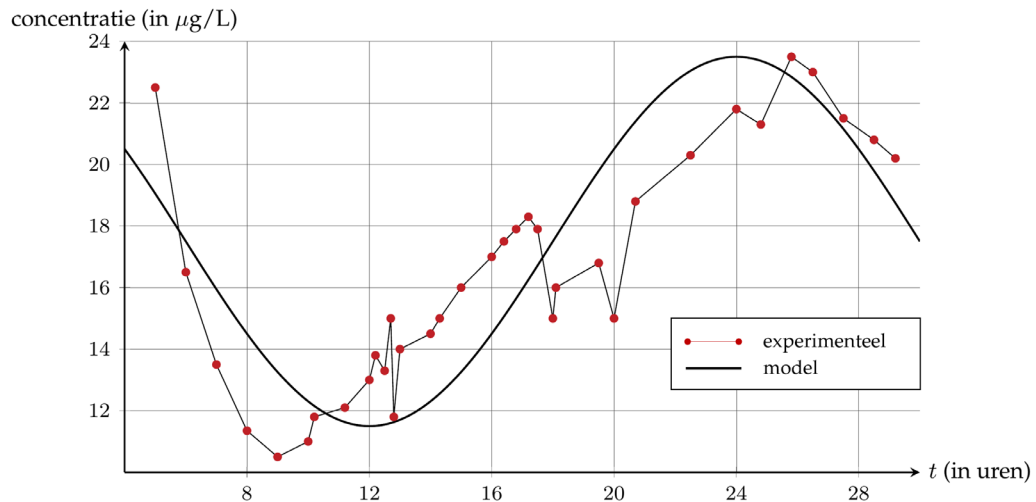
- 2p **d** Bereken met welke snelheid de konijnenpopulatie groeide op 1 januari 2015.

Het aantal konijnen benadert op den duur een grenswaarde.

- 3p **e** Beredeneer aan de hand van de formule $N = \frac{10\,000}{1 + 80 \cdot e^{-0,35 \cdot t}}$ hoe groot deze grenswaarde is, **zonder** voor t getallen in te vullen.

Opgave 6: Leptinecyclus

Leptine is een hormoon dat het hongergevoel remt. Van een proefpersoon is gedurende de dag de leptineconcentratie in het bloed gemeten. De resultaten van dit onderzoek zie je in de figuur hieronder. De curve 'experimenteel' is gebaseerd op de metingen aan de proefpersoon.



Aan het begin van de nacht is de leptineconcentratie hoog. Op dat moment ervaart de proefpersoon weinig honger. Tijdens de nacht daalt de concentratie tot een minimum rond 8 uur 's ochtends. Het hongergevoel is dan maximaal. In de figuur zie je dat de leptineconcentratie vlak na 12 uur en rond 18 uur plots daalt en kort daarna weer toeneemt.

2p **a** Verklaar deze plotselinge af- en toename.

De leptineconcentratie kan (bij benadering) worden beschreven met een sinusfunctie. Dit is de curve 'model' in de figuur. Deze sinusfunctie is van de vorm $C(t) = a + b \cdot \sin(c(t - d))$. Hierin is $C(t)$ de leptineconcentratie (in $\mu\text{g/L}$) en t is de tijd in uren met $t = 0$ om 12 uur 's nachts. De figuur staat uitvergroot op de uitwerkbijlage

5p **b** Bepaal de waarden van a , b , c en d . Licht je antwoord toe.

*Mocht je het antwoord op vraag **b** niet hebben kunnen geven, maak dan in de rest van de opgave gebruik van de (overigens onjuiste) formule $C(t) = 17 + 5,8 \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 18,5)\right)$.*

4p **c** Bereken hoe lang de leptineconcentratie volgens het model per dag onder de $19 \mu\text{g/L}$ ligt. Geef je antwoord in uren nauwkeurig.

1p **d** Het model mist essentiële informatie die wel in de experimentele curve te zien is. Geef hiervan een voorbeeld.

Einde