

James Boswell Examen VWO Wiskunde A – Voorbeeldexamen 2

Datum:

Tijd: 3 uur

Aantal vragen: 6

Aantal subvragen: 22

Aantal bijlagen: 0

Totaal aantal punten: 74

- Vermeld **op ieder vel** dat je inlevert je naam.
- Laat bij iedere opgave door middel van een berekening of motivatie zien hoe het antwoord is verkregen (o.a. bij gebruik van de grafische rekenmachine). Aan een antwoord zonder toelichting worden geen punten toegekend.
- Schrijf goed leesbaar met inkt. Het gebruik van tipp-ex e.d. of het schrijven met potlood is niet toegestaan. Gebruik uitsluitend een potlood voor het maken van een tekening.
- Toegestane hulpmiddelen:
 - Grafische rekenmachine;
 - Tekenmateriaal;
 - Lijst van formules

Opgave 1: Differentiëren

- 4p **a** Bepaal de afgeleide functie van $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Schrijf je antwoord zonder negatieve en gebroken exponenten.
- 4p **b** Gegeven is de functie $g(x) = 3x \cdot \ln(x)$.
De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt $(1, 0)$ is van de vorm $y = ax + b$. Bereken met behulp van differentiëren de waarden van a en b .
- 5p **c** Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van de toppen van de grafiek van $h(x) = x^3 - 12x + 8$. Geef bij iedere top aan of het gaat om een maximum of een minimum.

Opgave 2: De *Birthday Paradox*

De *Birthday Paradox* is een bekend probleem uit de kansrekening. Het probleem gaat over de kans dat er in een groep twee of meer personen op dezelfde dag jarig zijn. In een groep van 23 personen blijkt die kans al groter te zijn dan 50%.

In deze opgave gaan we de *Birthday Paradox* onderzoeken. We nemen aan dat een jaar 365 dagen heeft én dat de kans dat iemand op een bepaalde dag jarig is voor alle dagen in het jaar even groot is.

Stel dat je een groep van drie personen hebt. De kans dat deze drie personen **niet** op dezelfde dag jarig zijn, is gelijk aan:

$$P(\text{niet op dezelfde dag jarig}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \approx 0,9918$$

- 2p **a** Hoe groot is de kans dat er van deze drie personen twee of meer op dezelfde dag jarig zijn? Rond af op vier decimalen.
- 2p **b** Bereken de kans dat alle drie de personen op dezelfde dag jarig zijn.

Voor een grotere groep kun je de kans dat er twee of meer personen op dezelfde dag jarig zijn op dezelfde manier bepalen: we berekenen éérst de kans dat alle personen **niet** op dezelfde dag jarig zijn en gebruiken dit om uit te rekenen hoe groot de kans is dat er gemeenschappelijke verjaardagen zijn.

Voor vijf personen geldt dat de kans dat ze **niet** op dezelfde dag jarig zijn gelijk is aan:

$$P(\text{niet op dezelfde dag jarig}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} \approx 0,9729.$$

Op dezelfde manier als bij **a** kun je dan de kans berekenen dat er twee of meer personen op dezelfde dag jarig zijn.

We beschouwen nu een groep van 23 personen.

- 4p **c** Laat met een berekening zien dat de kans dat er twee of meer personen op dezelfde dag jarig zijn groter is dan 50%.

Opgave 3: Fooi

Sandra is serveerster in een café. Gedurende honderd werkdagen heeft ze bijgehouden hoeveel fooi ze iedere dag heeft gekregen. Het resultaat zie je in de onderstaande tabel:

bedrag (in €)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)
aantal dagen	2	17	48	29	4

In de tabel kun je aflezen dat Sandra op 17 van de 100 dagen een fooi heeft gehad van 5 euro of meer, maar minder dan 10 euro. Aan de hand van de tabel kun je een schatting maken van het totale bedrag dat Sandra in de honderd dagen aan fooi heeft gekregen.

- 3p **a** Maak een schatting van dat bedrag.

Van alle klanten die Sandra in de honderd dagen heeft bediend, heeft 80% haar een fooi gegeven. Neem aan dat dit percentage ook geldt voor de klanten die Sandra in de komende tijd bedient.

- 2p **b** Bereken de kans dat van de eerstvolgende 10 klanten er hoogstens 8 klanten zijn die Sandra een fooi geven. Rond je antwoord af op vier decimalen.

In de Verenigde Staten is men gewend om in cafés en restaurants flinke fooien te geven. De psycholoog L. Green heeft onderzocht in welke mate de fooi afhangt van de hoogte van de rekening. Zijn onderzoek heeft het volgende verband opgeleverd:

$$F = 0,127R + 1,21$$

Hierin is F de fooi en R de hoogte van de rekening (beide in dollars).

Met behulp van de formule van Green kun je bij iedere rekening berekenen hoeveel procent de fooi is van het totale bedrag van de rekening.

- 4p **c** Laat met een berekening zien dat dit percentage bij een rekening van 5 dollar groter is dan bij een rekening van 90 dollar.

Vier mensen hebben in een restaurant gegeten. Zij kunnen op twee manieren de rekening betalen:

1. Ze vragen samen één rekening.
2. Ze delen het totale bedrag door vier en betalen ieder apart.

- 4p **d** Beredeneer welk van beide manieren volgens de formule van Green het hoogste bedrag aan fooien oplevert voor het restaurant. Een getallenvoorbeeld is **niet** voldoende.

Opgave 4: Griepepidemie

Het onderzoeksbureau Nivel registreert aan het begin van iedere week hoeveel personen in Nederland griep hebben. Het aantal griepgevallen neemt in de winter ieder jaar flink toe.

In de tabel staan gegevens over het aantal personen met griep aan het begin van week 50 in 2017 en het begin van week 14 in 2018.

	aantal griepgevallen (in personen per 100 000 inwoners)
week 50 – 2017	25
week 14 – 2018	170

Stel dat het aantal griepgevallen in deze periode **lineair** is toegenomen.

- 4p **a** Bereken met behulp van lineair interpoleren hoeveel griepgevallen (in personen per 100 000 inwoners) er waren op 1 januari 2018. Rond je antwoord af op helen.

Volgens het onderzoeksbureau is het aantal griepgevallen in deze periode niet lineair, maar **exponentieel** toegenomen. In de rest van de opgave gaan we uit van exponentiële groei. Bij de gegevens uit de tabel kun je een formule opstellen van de vorm $N = b \cdot e^{at}$. Hierin is N het aantal personen per 100 000 inwoners met griep en t de tijd in weken met $t = 0$ aan het begin van week 50 in 2017.

- 4p **b** Stel deze formule op. Rond a af op drie decimalen.

*Mocht je het antwoord op vraag **b** niet hebben kunnen geven, maak dan in de volgende twee vragen gebruik van de (overigens onjuiste) formule $N = 21 \cdot e^{0,129 \cdot t}$*

- 3p **c** Bereken de afgeleide van N en bepaal hiermee de groeisnelheid van het aantal griepgevallen op 1 januari 2018. Rond af op één decimaal.

Bij 51 of meer griepgevallen per 100 000 inwoners is er sprake van een epidemie. Om te bepalen wanneer dit het geval is, is het handig om de formule die je bij **b** hebt gevonden om te schrijven naar een formule waarbij t is uitgedrukt in N .

- 4p **d** Bereken deze formule en bepaal met behulp van deze formule in welke week de griepepidemie begon.

In 1998-1999 was er sprake van een heel ernstige griepepidemie. Aan het begin van 1999 nam het aantal personen met griep iedere week met 21,3% toe. Neem aan dat deze groei exponentieel is verlopen.

- 3p **e** Bereken met hoeveel procent het aantal griepgevallen in deze periode per dag toenam. Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 5: Bloeddruk

Bij gezonde mensen varieert de bloeddruk tussen de 76 mmHg (onderdruk) en de 120 mmHg (bovendruk). Een gezond persoon heeft een gemiddeld hartritme van 75 hartslagen per minuut.

De bloeddruk van een gezond persoon kan bij benadering worden beschreven met een periodieke functie van de vorm $D(t) = a + b \cdot \sin(c(t - d))$. Hierin is $D(t)$ de bloeddruk (in mmHg) en t de tijd in seconden. Voor $t = 0$ kiezen we het moment dat de druk maximaal is (bovendruk).

- 5p **a** Bepaal de waarden van a , b , c en d . Licht je antwoord toe.

Voor personen met een verhoogde bloeddruk kan de bloeddruk worden beschreven met de periodieke functie $D(t) = 115 + 25 \cdot \sin(2,8\pi(t + 0,18))$. Hierin is $D(t)$ de bloeddruk (in mmHg) en t de tijd in seconden.

- 3p **b** Geef voor mensen met een verhoogde bloeddruk de maximale bloeddruk en het gemiddelde aantal hartslagen per minuut.

Er komt een patiënt bij de huisarts. Tijdens het consult wordt de bloeddruk van de patiënt gemeten. De bovendruk blijkt erg hoog te zijn, namelijk 159 mmHg. Een paar minuten later is deze weer flink gezakt. De huisarts vermoedt een 'witte jassen'-effect: personen ervaren het bezoek aan een arts als vervelend waardoor de bloeddruk stijgt.

Bij gezonde personen is de gemiddelde bovendruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 120 mmHg en een standaardafwijking van 6,1 mmHg. De huisarts besluit een statistische toets uit te voeren om na te gaan of de patiënt een verhoogde bloeddruk heeft.

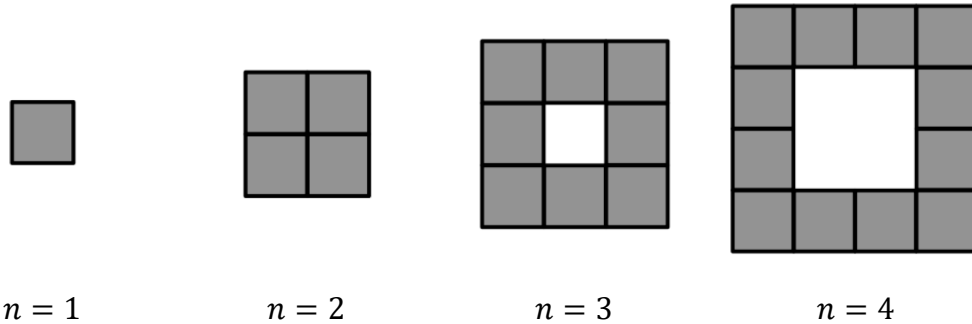
- 2p **c** Schrijf de hypothesen op die de huisarts in zijn statistische toets hanteert.

De huisarts vraagt de patiënt om zijn bloeddruk thuis gedurende tien dagen 's morgens en 's avonds bij te houden. Na tien dagen komt de patiënt weer bij de huisarts. De patiënt meldt dat zijn gemiddelde bovendruk gedurende deze tijd gelijk is aan 122,2 mmHg.

- 4p **d** Voer de hypothesetoets uit en geef de conclusie die de huisarts op basis van deze toets zal trekken. Gebruik een significantieniveau van 5%.

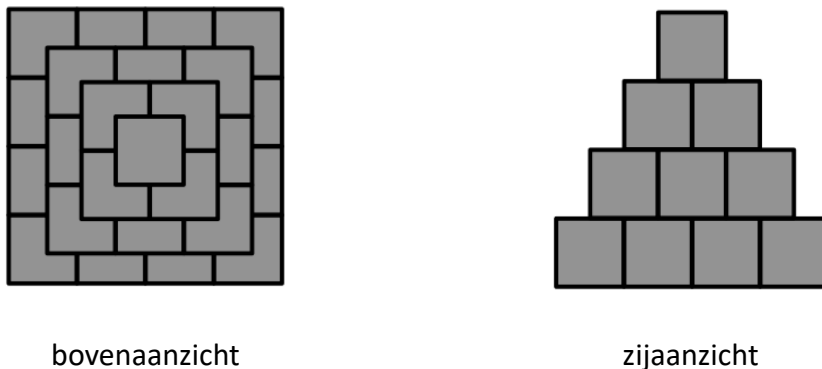
Opgave 6: Een piramide

In deze opgave bekijken we een piramide die gemaakt is van kubusvormige blokken. De piramide is opgebouwd uit een aantal lagen. In de figuur hieronder zie je de eerste vier lagen van de piramide.



Als $n > 2$ ontstaat er een gat in het midden en is de piramide dus hol van binnen.

In de volgende figuur zie je het boven- en zijaanzicht van de piramide als je de lagen $n = 4$ tot en met $n = 1$ op elkaar stapelt.



Vanaf $n = 2$ neemt het aantal blokken iedere laag met een vast aantal toe.

- 2p **a** Bereken hoeveel blokken er iedere laag bijkomen en reken uit hoeveel blokken er nodig zijn voor de lagen met $n = 5$ en $n = 6$.
- 2p **b** Geef de directe formule voor het aantal blokken b_n in de n -de laag voor $n \geq 2$.

Met dit model kun je een schatting maken hoeveel blokken er nodig zijn geweest voor de bouw van Piramide van Cheops, de grootste piramide van de wereld. De piramide van Cheops is 138 meter hoog. Bij de bouw van deze piramide zijn blokken met een hoogte van 15 cm gebruikt.

- 4p **c** Gebruik deze gegevens en bereken het totaal aantal blokken dat bij de bouw van de Piramide van Cheops is gebruikt.
Hint: Bereken éérst uit hoeveel lagen de piramide bestaat.

Einde