BOSWELL-BÈTA

James Boswell Examen

VWO Wiskunde B – Voorbeeldexamen 2

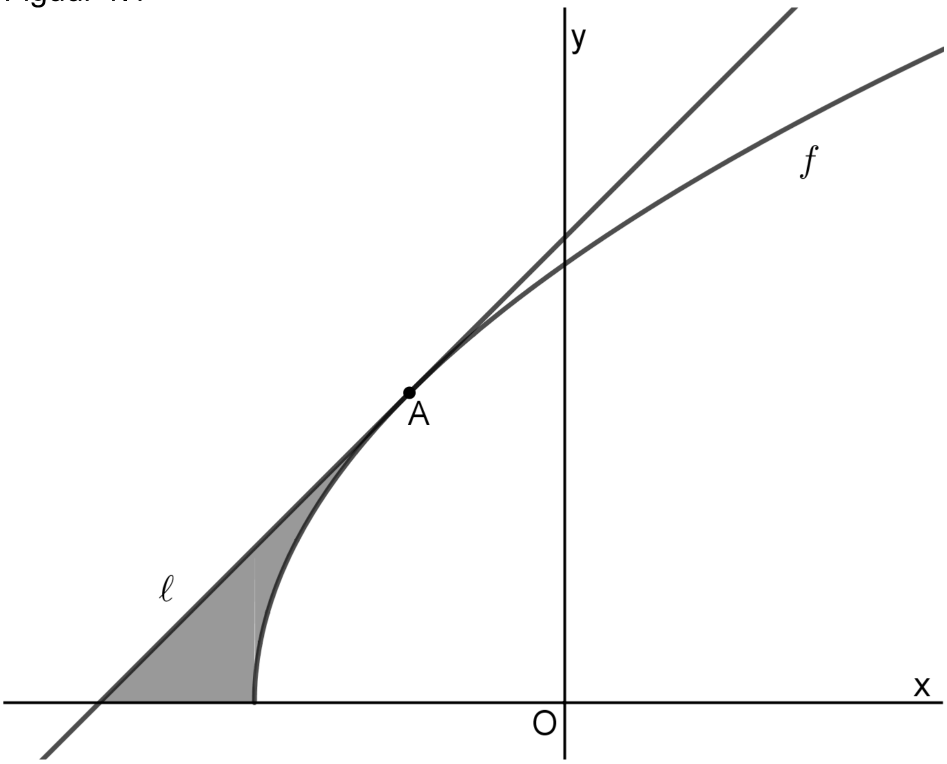
Datum:	
Tijd:	3 uur
Aantal vragen:	6
Aantal subvragen:	15
Aantal bijlagen:	0
Totaal aantal punten:	82

- Vermeld op ieder vel papier uw naam.
- Begin opgaven 1 t/m 6 op een nieuw vel papier.
- Laat bij iedere opgave door middel van een berekening of motivatie zien hoe het antwoord verkregen is (ook bij gebruik van de grafische rekenmachine). <u>Aan een antwoord zonder berekening of toelichting worden geen punten toegekend.</u>
- Schrijf goed leesbaar met blauwe of zwarte inkt. Het gebruik van tipp-ex e.d. of het schrijven met potlood is niet toegestaan. Gebruik een potlood uitsluitend voor het maken van tekeningen.
- Toegestane hulpmiddelen:
  - Grafische rekenmachine (zonder CAS-systeem);
  - Tekenmateriaal;
  - Geodriehoek en passer.

Opgave 1. Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x + 8}$

In figuur 1.1 is de grafiek van f getekend.

Figuur 1.1



Lijn ℓ is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A(-1, 2)$.

5p a. Bewijs dat lijn ℓ wordt gegeven door: $y - x - 3 = 0$.

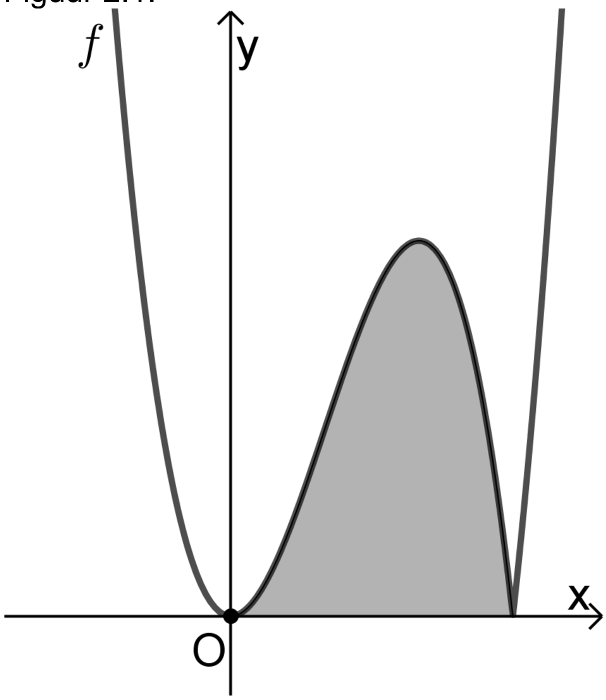
Vlakdeel V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, lijn ℓ en de x-as. In figuur 1.1 is vlakdeel V grijsgekleurd.

6p b. Bereken exact de oppervlakte van vlakdeel V.

Opgave 2. Gegeven is de functie $f(x) = |x^3 - 3x^2|$.

In figuur 2.1 is de grafiek van f getekend.

Figuur 2.1.



De grafiek van f heeft een aantal punten gemeenschappelijk met de lijn $y = 2x$.

6p a. Bepaal op exacte wijze dit aantal gemeenschappelijke punten.

Vlakdeel V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as. In figuur 2.1 is vlakdeel V grijsgekleurd.

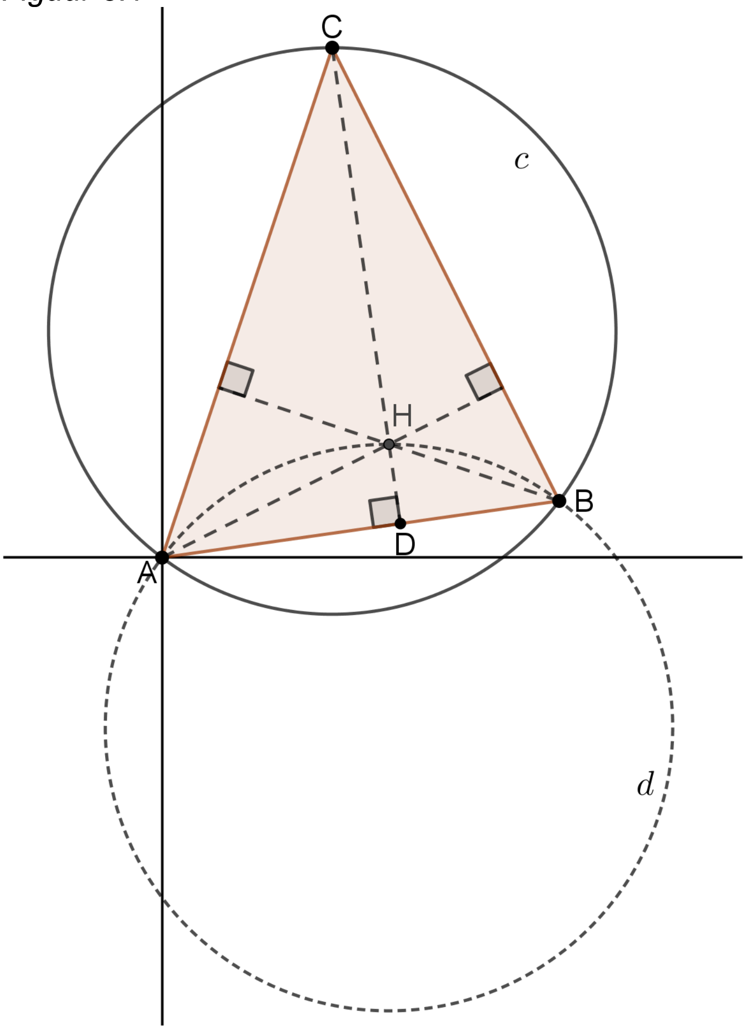
Stel dat vlakdeel V wordt gewenteld om de x-as.

6p b. Bereken algebraïsch de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Opgave 3. Gegeven is de cirkel $c: x^2 - 12x + y^2 - 16y = 0$. Op cirkel c liggen de drie punten $A(0,0)$, $B(14,2)$ en $C(6,18)$.

In figuur 3.1 zijn cirkel c en driehoek ΔABC getekend.

Figuur 3.1



Van driehoek ΔABC zijn de drie hoogtelijnen getekend. (Een hoogtelijn van een driehoek gaat door een hoekpunt van de driehoek en staat loodrecht op de tegenoverliggende zijde.)

De hoogtelijnen van driehoek ΔABC snijden elkaar in het punt $H(8,4)$.

5p a. Bewijs dat $\angle AHB = 135°$.

De lijn door de punten C en H snijdt lijnstuk AB in punt D.

5p b. Bereken exact de coördinaten van punt D.

Cirkel d is de cirkel die door de punten A, H en B gaat. Zie figuur 3.1.

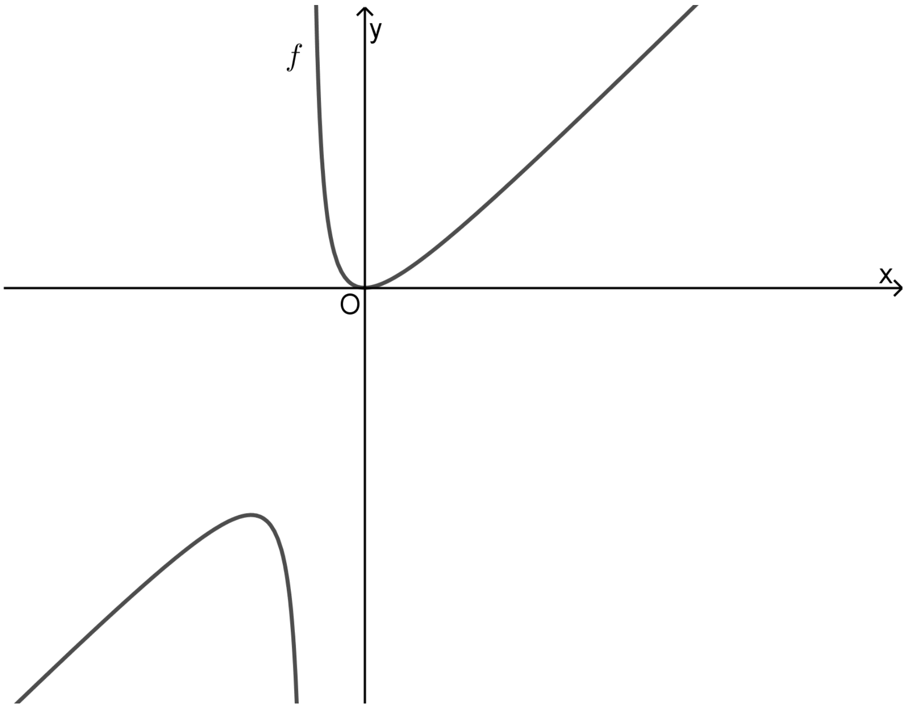
6p c. Bewijs dat cirkel c dezelfde straal heeft als cirkel d.

Opgave 4. Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

De grafiek van f is getekend in figuur 4.1.

Figuur 4.1



4p a. Bewijs dat:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$$

Voor bepaalde waarden van p is de lijn $l_p: y = -3x + p$ raaklijn aan de grafiek van f.

5p b. Bereken exact voor welke waarden van p dit het geval is.

Gegeven is de functie:

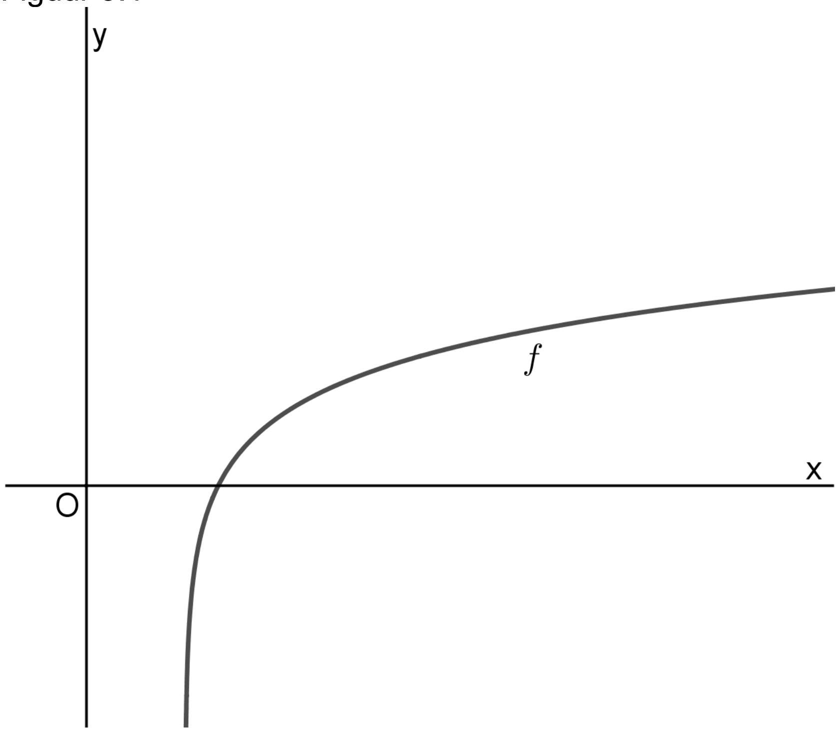
$$g(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}$$

De grafiek van g is gelijk aan de grafiek van f nadat punt $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ uit de grafiek van f is weggelaten.

5p c. Toon dit op exacte wijze aan.

Opgave 5. In figuur 5.1 is de grafiek van een bepaalde functie f getekend.

Figuur 5.1



De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = e^x$ door deze achtereenvolgens:

(I) 5 omhoog te schuiven.
(II) Met een factor $\frac{1}{3}$ te vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as.
(III) Te spiegelen in de lijn $y = x$.

5p a. Toon aan dat de functie f wordt gegeven door: $f(x) = \ln(3x - 5)$.

De lijn ℓ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ is een raaklijn aan de grafiek van f.

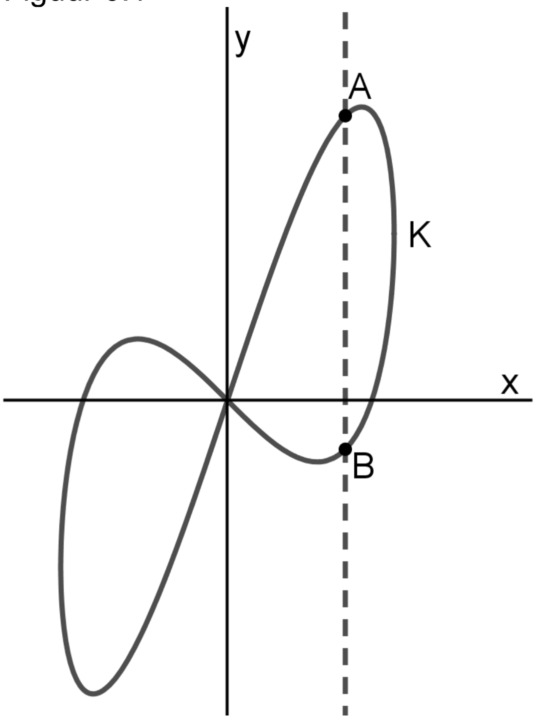
6p b. Bewijs dit.

Opgave 6. Punt P beweegt door het vlak volgens de volgende vergelijkingen:

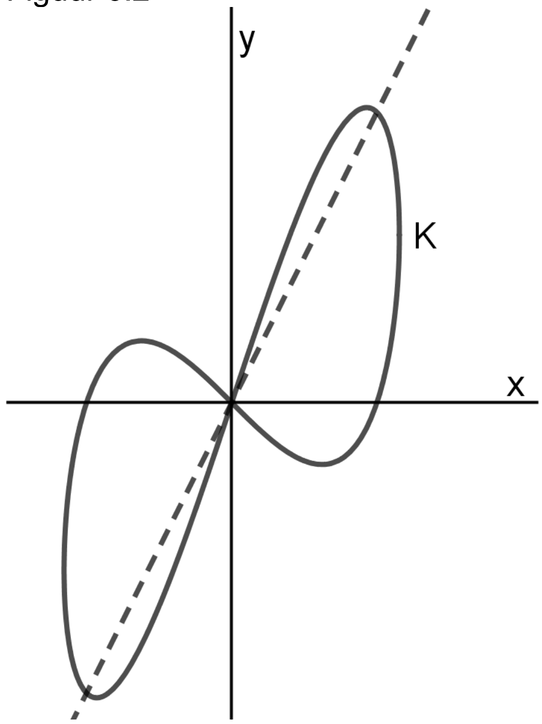
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) + \cos(t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

De kromme die punt P doorloopt, noemen we kromme K. In figuur 6.1 is kromme K getekend.

Figuur 6.1



Figuur 6.2



Kromme K snijdt de lijn $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ in de punten A en B.

5p a. Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

Punt P passeert de oorsprong $O(0,0)$ twee keer: de eerste keer met snelheidsvector $\vec{v}_1$ en de tweede keer met snelheidsvector $\vec{v}_2$.

6p b. Bereken algebraïsch de hoek tussen de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.

Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn er 4 waarden voor t waarvoor geldt dat punt P zich op de lijn $y = 2x$ bevindt. Zie figuur 6.2.

7p c. Bereken exact voor welke waarden van t punt P zich *boven* de lijn $y = 2x$ bevindt.

EINDE